Péndulo Simple

Mediciones de Período para amplitudes mayores a 7°.

11/11/2013

Autores:

Grigera Paladino, Agustina (agrigerapaladino@yahoo.com.ar)

Lestani, Simón Exequiel (saimon_1_f@hotmail.com)

Vera, Demian Augusto (dvera@alumnos.exa.unicen.edu.ar)

Resumen.

Una oscilación es un movimiento que se produce en torno de un punto de equilibrio.

Es considerada oscilación armónica aquella con movimiento perpetuo cuya amplitud máxima con respecto a su punto de equilibrio no varía con el transcurrir del tiempo.

En un péndulo simple (masa puntual) éste fenómeno se produce para amplitudes menores a 7°, aproximadamente, desde el punto de equilibrio.

En esta experiencia se estudió cómo se ve afectado el período de un péndulo simple para amplitudes mayores a 7°, cuyo movimiento es descripto por una serie de potencias de senos cuadrados.

¿Cuál será el ajuste necesario, dadas las condiciones instrumentales y ambientales en que los datos fueron tomados?

Introducción.

Los péndulos forman parte de la vida cotidiana. Éstos no presentan un movimiento constante, sino que siempre son amortiguados por fuerzas no conservativas, tales como la fuerza de rozamiento o la fuerza viscosa (rozamiento interno en las partículas de un fluido).

El péndulo simple consta de una cuerda de longitud L y una lenteja de masa m. Cuando la lenteja se deja en libertad desde un ángulo inicial θ con la vertical, oscila de un lado a otro con un período T. Las unidades que intervienen sugieren que el período debería ser una expresión proporcional a $\sqrt{L/g}$. Si la fórmula del período contuviera la masa, la unidad Kg debería cancelarse por alguna otra magnitud. Sin embargo, ninguna combinación de L (largo de la cuerda) y g (aceleración de la gravedad) puede anular las unidades de masa. Así pues, el período no puede depender de la masa de la lenteja.

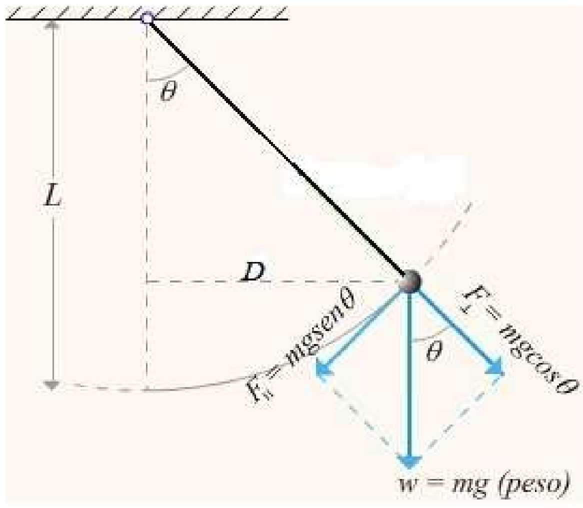

Figura 1: Fuerzas que actúan en un péndulo simple

Las fuerzas que actúan sobre la lenteja son su peso *m**g***y la tensión ***T*** de la cuerda (Figura 1). Cuando la cuerda forma un ángulo θ con la vertical, el peso tiene componentes *mg cos θ* a lo largo de la cuerda y *mg sen θ* tangencial al arco circular en el sentido de θ decreciente. Para la componente tangencial, la segunda ley de Newton ($\sum F = ma$) nos da

$$-mg \text{ sen } \theta = m\frac{d^2s}{dt^2}, \qquad (1)$$

donde la longitud del arco **s** está relacionada con el ángulo θ mediante **s**=L.θ.

Derivando dos veces con respecto al tiempo a ambos lados de la expresión anterior, se obtiene

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2)$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\ sen\ \theta \qquad (3)$$

Obsérvese que la masa m no aparece en la anterior ecuación, con lo que el movimiento de un péndulo no depende de su masa. Para ángulos muy pequeños, sen θ ≈ θ, entonces

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l}\theta \qquad \text{Con } \theta \ll 1 \qquad (4)$$

Por lo tanto el movimiento de un péndulo es muy aproximadamente armónico simple para amplitudes pequeñas.

La expresión (4) puede escribirse como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\omega^2\theta \qquad \text{Donde } \omega^2 = \frac{g}{l} \qquad (5)$$

El período del movimiento es entonces

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (6)$$

Cuando la amplitud de un péndulo se hace grande, su movimiento continúa siendo periódico pero deja de ser armónico simple. Para determinar el período debe tenerse en cuenta una ligera dependencia con la amplitud.

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}sen^2\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 sen^4\frac{1}{2}\theta + \cdots\right] (7)$$

Donde $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ es el período correspondiente a amplitudes menores a 7° y θ la amplitud inicial desde la que se deja caer la lenteja.

A continuación se estudiará la influencia de algunos de los términos de la serie anarmónica en el ajuste de la curva que contiene los resultados experimentales. Esta investigación tiene como objeto conocer cuántos términos vale la pena considerar dadas las condiciones y los instrumentos usados.

Procedimiento.

Se dispuso una lenteja de plomo suspendida mediante una cuerda de nylon de 0,5 milímetros de diámetro, colgando de una viga fija, constituyendo el péndulo.

Se colocó una regla sostenida con soportes verticales, mediante dos “nueces”, que determinó uno de los catetos del triángulo formado por ésta, la cuerda y la vertical. Se comprobó que la regla estaba ubicada de forma perfectamente horizontal usando un nivel magnético.

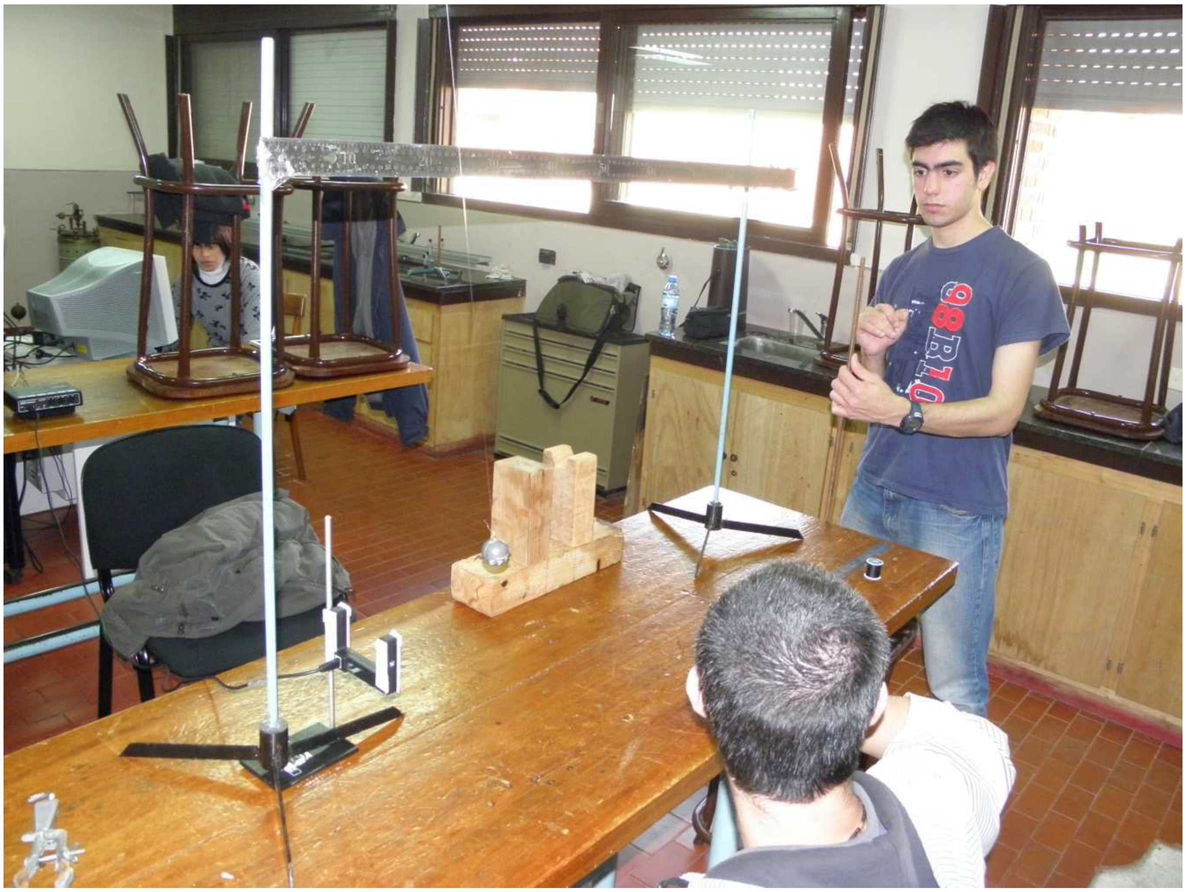

Imagen 1: Regla sostenida por soportes con nueces. El péndulo es sostenido mediante un hilo anudado a otro soporte fijo. El sensor mide los períodos y una placa, conectada a una PC, se encarga de enlistar los datos que son controlados por Agustina.

Con el uso de razones trigonométricas se determinó una serie de ángulos iniciales desde los cuáles se dejaría oscilar el péndulo.

Para disminuir movimientos que afecten las medidas que se deseaban tomar, como por ejemplo la rotación de la masa, el péndulo no fue manipulado directamente al momento de dejarlo caer, sino que se ató la masa a un trozo de hilo que luego fue quemado una vez que la cuerda principal formara el ángulo deseado con la vertical.

La determinación del ángulo inicial se llevó a cabo midiendo sobre la regla dispuesta horizontalmente la distancia correspondiente. Se usó la siguiente relación:

$$\tan\theta = \frac{D}{L'}$$

Donde θ es el ángulo inicial, L' es la distancia del eje de giro del péndulo a la regla dispuesta horizontalmente y D es la distancia que se aleja la masa de la vertical.

Los ángulos iniciales fueron pautados y luego considerando el error en la medición de D, volvimos a calcular el ángulo con la misma relación trigonométrica para saber el ángulo real desde el cual se dejó caer el péndulo.

Imagen 2: Momento en el que el hilo es quemado.

Para medir el período T con gran exactitud y precisión, se usó un *Photogate PASCO* modelo *ME-9215A* conectado a una placa y una pc con software apto para la manipulación de datos, de gráficos y de funciones matemáticas varias. Los programas usados fueron Science Workshop y OriginLab 8.

Cabe aclarar que la magnitud **g** (aceleración de la gravedad) utilizada también fue hallada mediante el mismo péndulo. Para obtener este dato se dejó oscilar el péndulo libremente mientras la computadora registraba los datos. Luego de un tiempo, el péndulo, que oscilaba con amplitudes muy pequeñas, demostraba tardar el mismo tiempo para completar cada ciclo que recorría. El número obtenido se usó como T en la expresión (6) (haciendo los correspondientes pasos algebraicos) para calcular la aceleración de la gravedad.

Resultados, análisis y discusión.

El gráfico 1 plasma los resultados obtenidos.

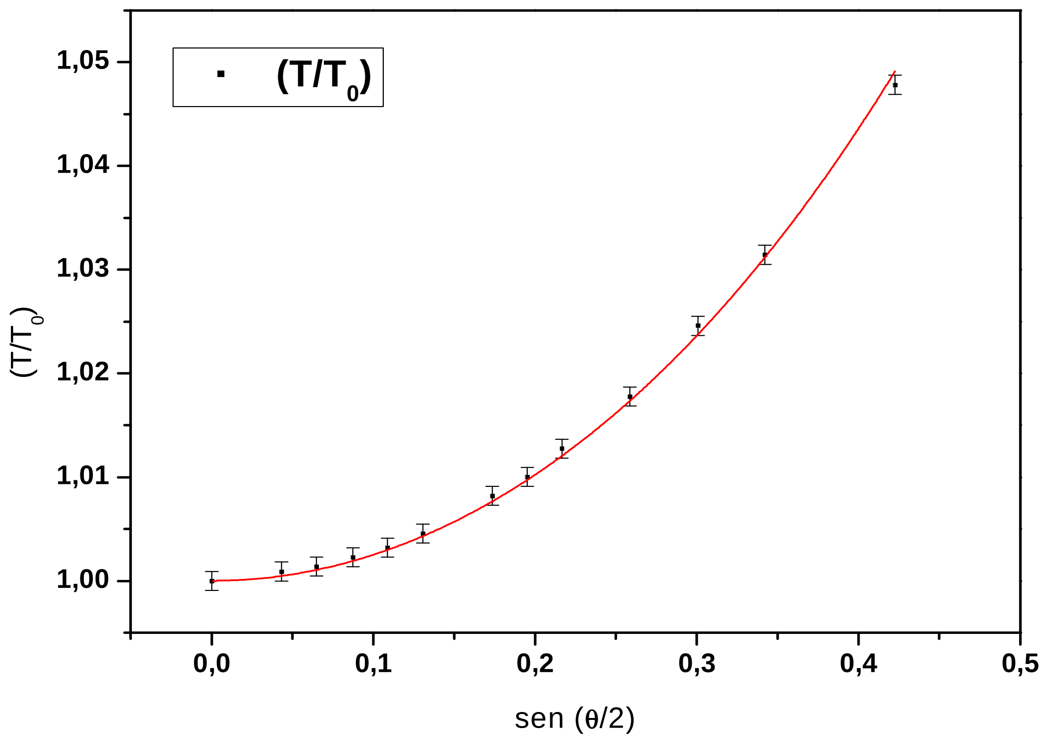

Gráfico 1: Se muestra con pequeños cuadrados negros el valor del cociente entre el período medido para cada amplitud (T) y el período (constante) para amplitudes muy pequeñas (T_0). Las pequeñas barras verticales que intersecan cada punto son los bastones de error, es decir, el error instrumental en la medición del período introducido por el sensor usado. La curva de color rojo, continua, es el resultado de aplicar sólo tres términos de la serie a una cantidad continua de números.

La experiencia comparó la curva que ilustran las medidas reales de períodos en función de la amplitud y las del modelo matemático descrito anteriormente. Y, posteriormente cuál fue el ajuste requerido para la mejor aproximación.

Como se ve en el gráfico 1, la serie, de la que sólo se han tomado tres términos, ajusta de forma muy precisa los datos experimentales. Se puede notar que el período no se ve alterado en las oscilaciones que presentan un ángulo inicial de hasta 17°.

No es necesario tener en cuenta más términos dada la resolución de los instrumentos usados. Una posterior experiencia con instrumental más preciso puede exigir el uso de más términos de la serie anarmónica.

Conclusión

Los péndulos (y cualquier sistema real) están expuestos a fuerzas que alteran la forma en que los parámetros y las variables matemáticas se relacionan para describir su movimiento. Dadas las condiciones en las que se trabajó, el ajuste de sólo tres términos de la serie anarmónica realizado a los datos experimentales es correcto y muy exacto. Es decir, sólo tomando tres términos de la serie puede hacerse un correcto análisis de los datos medidos con los instrumentos del laboratorio grande de física. Para instrumentos más precisos, será necesario realizar el ajuste usando de más términos de la serie anarmónica.

Apéndice

Tabla 1:

Angulo nominal(°)	Angulo real (°)	Distancia (cm)	T (período) (s)	Error relativo Eje x	Error absoluto Eje Y (s)
0	0	0	2,195	0,018	0,001
5	4,97	6	2,197	0,012	0,001
7.5	7,43	9	2,198	0,01	0,001
10	10,03	12,2	2,2	0,01	0,001
12.5	12,5	15,3	2,202	0,01	0,001
15	15,01	18,5	2,205	0,01	0,001
20	19,99	25,1	2,213	0,004	0,001
22.5	22,51	28,6	2,217	0,004	0,001
25	25,02	32,2	2,223	0,003	0,001
30	29,98	39,8	2,234	0,003	0,001
32.5	32,52	44	--	0,002	0,001
35	34,99	48,3	2,249	0,002	0,001
37.5	37,53	53		0,002	0,001
40	40	57,9	2,264	0,001	0,001
47.5	47,5	75,3	--	0,001	0,001
50	49,99	82,2	2,3	0,001	0,001

Tabla 1: En esta tabla se representan los valores numéricos obtenidos. La primera columna (ángulo nominal) enlista las amplitudes iniciales propuestas en principio para hacer oscilar el péndulo. La segunda columna (ángulo real) muestra cuáles fueron los ángulos medidos realmente dadas las incertidumbres de los instrumentos (resolución). La tercera columna (Distancia) presenta las distancias medidas desde la vertical para lograr que la amplitud fuera la requerida. La cuarta columna (período) muestra los valores de los períodos para cada amplitud inicial. Las últimas dos columnas enlistan los errores en cada eje (relativo y absoluto, respectivamente). Las celdas vacías corresponden a mediciones perdidas.

Referencias.

Tipler, Paul A. Mosca, Gene. Física para la ciencia y la tecnología. Volumen 1. Sexta Edición. 2010. Páginas: 470 – 473.